考研数学

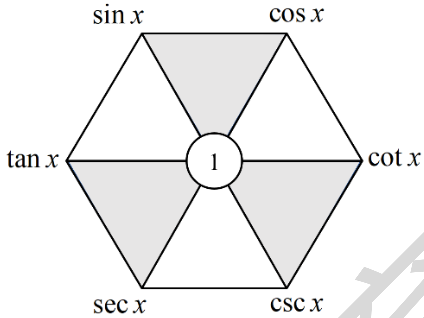
基础知识扫盲

主讲：Sora 老师

第一节　初高中基础知识总结

一、三角函数与反三角函数公式

1．三角函数基本关系



（1）对角线上乘积为 1：$\csc x=\dfrac{1}{\sin x},\ \sec x=\dfrac{1}{\cos x},\ \cot x=\dfrac{1}{\tan x}$；

（2）顶点等于相邻两个顶点乘积：$\tan x=\dfrac{\sin x}{\cos x},\ \cot x=\dfrac{\cos x}{\sin x}$；

（3）阴影三角形上两顶点的平方和等于下顶点的平方：

$$\sin^2 x+\cos^2 x=1,\ 1+\tan^2 x=\sec^2 x,\ 1+\cot^2 x=\csc^2 x .$$

2．诱导公式

对于 $\dfrac{k\pi}{2}\pm x$（$k\in Z$）的三角函数值

（1）符号看象限：把 x 看成锐角，看 $\dfrac{k\pi}{2}\pm x$ 对应三角函数值的符号；（一正二正弦，三切四余弦）

（2）奇变偶不变：当 k 是偶数时，函数名不改变；当 k 是奇数时，函数名改变成相应的余函数值，即 $\sin\to\cos,\ \cos\to\sin,\ \tan\to\cot,\ \cot\to\tan$.

【例 1】写出下列三角函数的值

$\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)=$_____．　$\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)=$_____．　$\sin\left(\dfrac{\pi}{2}+x\right)=$_____．　$\cos\left(\dfrac{\pi}{2}+x\right)=$_____．

$\sin(\pi-x)=$_____．　$\cos(\pi-x)=$_____．　$\sin(\pi+x)=$_____．　$\cos(\pi+x)=$_____．

3．二倍角公式

$$\sin 2x = 2\sin x\cos x,\ \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x,$$

$$\tan 2x = \frac{2\tan x}{1-\tan^2 x},\ \cot 2x = \frac{\cot^2 x - 1}{2\cot x}.$$

4．半角公式（降幂公式）

$$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos 2x),\ \cos^2 x = \frac{1}{2}(1+\cos 2x).$$

5．和差公式

$$\sin(x\pm y) = \sin x\cos y \pm \cos x\sin y,\ \cos(x\pm y) = \cos x\cos y \mp \sin x\sin y,$$

$a\sin x + b\cos x = \sqrt{a^2+b^2}\sin\left(x+\arctan\dfrac{b}{a}\right)$（辅助角公式），

$$\tan(x\pm y) = \frac{\tan x \pm \tan y}{1\mp \tan x\tan y},\ \cot(x\pm y) = \frac{\cot x\cot y \mp 1}{\cot y \pm \cot x}.$$

6．积化和差公式

$$\sin x\cos y = \frac{1}{2}\left[\sin(x+y)+\sin(x-y)\right],\ \cos x\sin y = \frac{1}{2}\left[\sin(x+y)-\sin(x-y)\right],$$

$$\cos x\cos y = \frac{1}{2}\left[\cos(x+y)+\cos(x-y)\right],\ \sin x\sin y = \frac{1}{2}\left[\cos(x-y)-\cos(x+y)\right].$$

7．和差化积公式

$$\sin x + \sin y = 2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2},\ \sin x - \sin y = 2\sin\frac{x-y}{2}\cos\frac{x+y}{2},$$

$$\cos x + \cos y = 2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2},\ \cos x - \cos y = -2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}.$$

8．万能公式

若 $t = \tan\dfrac{x}{2}$（$-\pi < x < \pi$），则 $\sin x = \dfrac{2t}{1+t^2}$，$\cos x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$.

9．反三角函数基本关系

$\arcsin x + \arccos x = \dfrac{\pi}{2}$（$-1 \le x \le 1$），$\arctan x + \operatorname{arccot} x = \dfrac{\pi}{2}$（$-\infty < x < +\infty$）.

【例 2】用万能公式 $t=\tan\frac{x}{2}$ 化简 $\frac{\csc x+1}{\csc x+\cot x+1}$.

【例 3】设 $x=\tan t$, 其中 $t\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$, 将 $\sin t\tan t+t^2\ln(\sec t+\cos t)$ 化为 x 的函数.

二、代数与方程

1. 指数对数运算法则

$$a^m a^n=a^{m+n},\ (a^m)^n=a^{mn},\ (ab)^m=a^m b^m,\ a^{-1}=\frac{1}{a},\ \sqrt[n]{a}=a^{\frac{1}{n}},\ a^0=1,\ \sqrt{a^2}=|a|,$$

$$\ln a+\ln b=\ln(ab),\ \ln\frac{a}{b}=\ln a-\ln b,\ \ln a^n=n\ln a,\ a=e^{\ln a}.$$

【例 4】化简 $\frac{\sqrt{a^3b^2\sqrt[3]{ab^2}}}{\left(a^{\frac{1}{4}}b^{\frac{1}{2}}\right)^4 a^{-\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}}$.

【例 5】对$\left(\frac{1}{x}\cdot\frac{a^x-1}{a-1}\right)^{\frac{1}{x}}$做对数恒等变形.

2．常用数列

（1）等差数列：首项为a_1, 公差为d（$d\neq 0$）

通项：$a_n=a_1+(n-1)d$；前n项和：$S_n=\frac{n}{2}(a_1+a_n)$.

（2）等比数列：首项为a_1, 公比为q（$q\neq 0$）

通项：$a_n=a_1q^{n-1}$；前n项和：$S_n=\begin{cases} na_1, & q=1, \\ \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}, & q\neq 1. \end{cases}$

3．阶乘与双阶乘

$n!=1\times 2\times 3\times\cdots\times n$, 规定$0!=1$,

$(2n)!!=2\times 4\times\cdots\times(2n)=2^n n!$,

$(2n+1)!!=1\times 3\times\cdots\times(2n+1)$.

4．因式分解公式

$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$, $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$,

$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$, $(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$,

$(a+b)^n=\sum_{k=0}^{n}C_n^k a^{n-k}b^k=\sum_{k=0}^{n}C_n^k a^k b^{n-k}$, 其中$C_n^k=\frac{n!}{(n-k)!k!}$,

$a^2-b^2=(a+b)(a-b)$, $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$, $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$,

$a^n-b^n=(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+\cdots+ab^{n-2}+b^{n-1})$（$n$ 是正整数）.

【例 6】对下列各式作因式分解

（1）$(x+y)^3-x^3-y^3$；　　　　（2）x^4-x^2-1+2x.

5．整式的除法

设 n 为一个非负整数，$a_0,a_1,\cdots,a_n$ 为实数，则对于一个变量的多项式

$$f(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n,$$

如果 $a_n\neq 0$, 称其为 n 次多项式. 零次多项式就是只有常数项的单项式，若 $a_0,a_1,\cdots,a_n$ 全为零，则称其为零多项式.

对任意两个实系数的多项式 $f(x)$ 和 $g(x)$（$g(x)$ 不是零多项式），一定存在实系数的多项式 $Q(x)$ 和 $R(x)$, 使得 $f(x)=Q(x)g(x)+R(x)$, 其中 $R(x)$ 的次数小于 $g(x)$ 的次数，或 $R(x)$ 为零多项式，当 $f(x)$ 与 $g(x)$ 固定的时候，这样得到的 $Q(x)$ 与 $R(x)$ 是唯一的，此时 $Q(x)$ 称为商式，$R(x)$ 称为余式．当 $R(x)=0$ 时，称 $g(x)$ 整除 $f(x)$.

【例 7】求 $f(x)=3x^3+4x^2-5x+6$ 除以 $g(x)=x^2-3x+1$ 的商式 $Q(x)$ 和余式 $R(x)$.

6．一元二次方程： $ax^2+bx+c=0$（$a\neq 0$）

（1）求根公式：$\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$，其中$\Delta=b^2-4ac$为判别式，$\Delta>0$，方程有两个不等实根，$\Delta=0$，方程有两个相等实根，$\Delta<0$，方程无实根（有一对共轭复根）.

（2）根与系数关系（韦达定理）：$x_1+x_2=-\dfrac{b}{a}$，$x_1x_2=\dfrac{c}{a}$.

三、简易逻辑

1．命题的标准形式

“若A则B”，其中A为命题条件，B为命题结论．特别地，我们把“若A则B”叫做肯定命题，而相对地，把“若A则非B”叫做否定命题，或者称为命题的否定．

2．命题的四种形式

原命题：若A则B；逆命题：若B则A；否命题：若非A则非B；逆否命题：若非B则非A．其中互为逆否关系的两个命题是同真同假的，互逆和互否关系的两个命题真假性没有关系．

3．充分条件和必要条件

若“若A则B”为真命题，则A是B的充分条件（或B的充分条件是A），B是A的必要条件（或A的必要条件是B）；若“若A则B”和“若B则A”均为真命题，则A和B互为充要条件．

4．数学归纳法

数学归纳法是一种数学证明方法，通常被用于证明某个命题在自然数范围内成立．其一般步骤如下：

第一步：验证n取第一个自然数时成立；

第二步：假设$n=k$时成立，然后以验证的条件和假设的条件作为论证的依据进行推导，在接下来的推导过程中推导处理在$n=k+1$时假设的原式成立．

最后基于以上两步作总结表述．

【例8】证明：$1^2+2^2+\cdots+n^2=\dfrac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$.

四、常用不等式

$x-1<[x]\le x<[x]+1,\ \big||a|-|b|\big|\le|a\pm b|\le|a|+|b|,$

$\dfrac{x}{1+x}<\ln(1+x)<x$（$x>0$），$\mathrm{e}^x\ge x+1,$

$\sin x<x$（$x>0$），$\sin x<x<\tan x$（$0<x<\dfrac{\pi}{2}$），

$$\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}\le\sqrt{ab}\le\frac{a+b}{2}\le\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}\ (a,b>0),$$

$$\frac{3}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}\le\sqrt[3]{abc}\le\frac{a+b+c}{3}\le\sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{3}}\ (a,b,c>0),$$

$$\frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}}\le\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}\le\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\ (a_i>0,\ i=1,2,\cdots,n).$$

五、极坐标系和参数方程（仅数一数二）表示的函数

1．极坐标系表示的函数

在平面上取定一点O，称为极点，从O出发引一条射线Ox,称为极轴．再取定一个长度单位，一个角度单位，规定角度取逆时针方向为正，这样就建立了一个极坐标系．此时，平面上

任一点 P 的位置就可以用线段 OP 的长度 r 以及从 Ox 到 OP 的角度 θ 来确定，有序数对 $\left(r,\theta\right)$ 就称为 P 点的极坐标，记为 $P\left(r,\theta\right)$；r 称为 P 点的极径，θ 称为 P 点的极角.

$r=r\left(\theta\right)$ 为极坐标系表示的函数.

2．直角坐标和极坐标之间的互换

（1）互换条件：极点与原点重合，极轴做 x 轴正向，两种坐标系的长度单位一致.

（2）互换公式：

$$\begin{cases} x=r\cos\theta \\ y=r\sin\theta \\ r^2=x^2+y^2 \end{cases}$$

【例9】写出下列函数对应的直角坐标方程

（1）$r=1$；（2）$r=2\cos\theta$；（3）$r^2=\cos 2\theta$.

【例10】写出下列函数对应的极坐标方程

（1）$x=1$；（2）$2xy=1$（$x>0,\ y>0$）；（3）$\left(x^2+y^2\right)^3=y^4$.

3．参数方程表示的函数（仅数一数二）

在平面直角坐标系中，如果曲线上任意一点的坐标(x,y)都是某个变量t的函数

$$\begin{cases} x=f(t), \\ y=g(t), \end{cases}$$

并且对于t的每一个值，由方程组所确定的点$M(x,y)$都在这条曲线上，那么该方程组就叫做这条曲线的参数方程，t叫做参数．相对于参数方程而言，直接给出点的坐标间关系的方程叫做普通方程．

在同一个直角坐标系下，参数方程和普通方程可以互化．

【例 11】（1）写出曲线$\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}=1$的参数方程；（2）写出直线$\begin{cases} x=2+t, \\ y=2-2t \end{cases}$的普通方程；（3）写出曲线$r=2\theta$的参数方程．

第二节　函数基础知识总结

一、函数的概念

1．定义

设 x 和 y 是两个变量，D 是一个给定的数集，如果对于 D 中的每一个 x, 变量 y 按照一定的法则总有唯一确定的值与之对应，则称 y 是 x 的函数，记为 $y=f(x)$．数集 D 称为函数的定义域，x 称为自变量，y 称为因变量，f 称为对应法则，y 取值的全体所构成的集合称为函数的值域，记作 R_f．

2．函数的表示法

表格法、图形法、解析法（公式法）.

【注】（1）对应法则 f 是给定 x 求 y 值的方法，这里的“ x ”可以广义化.

（2）函数只与对应法则及定义域有关，而与变量及对应法则选取的字母无关.

（3）两个函数相同 $\Leftrightarrow$ 定义域相同且对应法则相同.

【例 1】 求下列函数的定义域：

（1）$f(x)=\dfrac{\ln(x-1)}{\sqrt{x^2-1}}$；　　（2）$f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2-2x-3}}+\arcsin\dfrac{x-1}{3}$．

【例 2】 判断下列函数是否相同？

（1）$f(x)=\sqrt[3]{x^4-x^3}, g(x)=x\sqrt[3]{x-1}$；

（2）$f(x)=\lg x^2, g(x)=2\lg x$．

二、函数的四种特性

1．有界性

设函数 $f(x)$ 在区间 I 上有定义，如果 $\exists M>0,$ 使对 $\forall x\in I$ 都有 $|f(x)|\le M,$ 则称 $f(x)$ 在区间 I 上有界；若不存在这样的 $M,$ 即 $\forall M>0,$ 总 $\exists x_0\in I,$ 使得 $|f(x_0)|>M,$ 则称 $f(x)$ 在区间 I 上无界.

有上界：$\exists K_1,$ 使对 $\forall x\in I$ 都有 $f(x)\le K_1$.

有下界：$\exists K_2,$ 使对 $\forall x\in I$ 都有 $f(x)\ge K_2$.

【注】（1）函数有界的充要条件是函数既有上界又有下界.

（2）常见的有界函数：$|\sin x|\le 1,\ |\cos x|\le 1,\ x\in(-\infty,+\infty)$；

$|\arcsin x|\le \frac{\pi}{2},\ x\in[-1,1]$；$0\le \arccos x\le \pi,\ x\in[-1,1]$；

$|\arctan x|<\frac{\pi}{2},\ x\in(-\infty,+\infty)$；$0<\operatorname{arccot} x<\pi,\ x\in(-\infty,+\infty)$.

2．单调性

设函数 $f(x)$ 在区间 I 上有定义，如果对于 $\forall x_1,x_2,$ 且 $x_1<x_2$ 时，恒有

$$f(x_1)<f(x_2)\ （f(x_1)>f(x_2)），$$

则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上是单调增加（减少）的.

【注】若对于 $\forall x_1,x_2,$ 且 $x_1<x_2$ 时，恒有 $f(x_1)\le f(x_2)$（$f(x_1)\ge f(x_2)$），则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上是单调不减（不增）的.

3．奇偶性

设函数 $f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称，若 $\forall x\in D,$ 有 $f(-x)=f(x)$（$f(-x)=-f(x)$），则称 $f(x)$ 为偶（奇）函数．偶函数的图像关于 y 轴对称；奇函数的图像关于原点对称，若在 $x=0$ 处有定义，则 $f(0)=0$.

【注】（1）奇偶函数的运算性质：

① 奇函数的代数和仍为奇函数；偶函数的代数和仍为偶函数.

② 偶数个奇（或偶）函数乘积为偶函数；奇数个奇函数乘积为奇函数.

③ 一奇一偶乘积为奇函数.

（2）常见的奇函数：$x^{2n+1}, \sin x, \tan x, \arcsin x, \arctan x, \ln\frac{1-x}{1+x}, \ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$；

常见的偶函数：$x^{2n}, |x|, \cos x$.

（3）任何一个定义域关于原点对称的函数都可以看成奇函数和偶函数之和.

设 $y=f(x)$ 的定义域关于原点对称，则 $F(x)=\dfrac{f(x)+f(-x)}{2}$ 为偶函数，

$G(x)=\dfrac{f(x)-f(-x)}{2}$ 为奇函数，且 $f(x)=F(x)+G(x)$.

（4）$f(x)$ 关于 $x=a$ 对称 $\Leftrightarrow$ $f(a-x)=f(a+x)$

【例3】设 $f(x)$ 为定义在 $(-\infty,+\infty)$ 上的偶函数，且 $x\ge 0$ 时，$f(x)=x^3+2x^2-\sin x+\mathrm{e}^x$，求 $f(x)$ 的表达式.

4．周期性

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D，如果存在一个正数 T，使得 $\forall x\in D, (x\pm T)\in D$，都有 $f(x+T)=f(x)$，则称 $f(x)$ 是以 T 为周期的周期函数.

【注】（1）通常我们说的周期函数的周期是指最小正周期.

（2）并非每个周期函数都有最小正周期.

（3）常见的周期函数：

$\sin x,\ \cos x$ 以 2π 为周期；$|\sin x|,\ |\cos x|$ 以 π 为周期；

$\tan x,\ \cot x$ 以 π 为周期；$|\tan x|,\ |\cot x|$ 以 π 为周期；

三、反函数与复合函数

1．反函数

设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D, 值域为 R_f, 若对于每一个 $y\in R_f$, 从关系式 $y=f(x)$ 中可以确定唯一的一个 x 值，则称变量 x 为变量 y 的函数，记为 $x=f^{-1}(y)$, 此时 $x=f^{-1}(y)$ 称为函数 $y=f(x)$ 的反函数，习惯上也可把 $y=f(x)$ 的反函数记为 $y=f^{-1}(x)$. 相对于反函数来说，原来的函数 $y=f(x)$ 称为直接函数.

【注】（1） $y=f(x)$ 的图像与其反函数 $x=f^{-1}(y)$ 的图像重合； $y=f(x)$ 的图像与其反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图像关于直线 $y=x$ 对称.

（2）只有一一对应的函数才有反函数，特别地，单调函数存在反函数，且反函数也是单调函数.

（3） $f\left[f^{-1}(y)\right]=y,\ f^{-1}\left[f(x)\right]=x$.

（4）常见的反函数：

① $y=a^x$,（$a>0,\ a\neq 1$）， $x\in(-\infty,+\infty)$ 的反函数为 $y=\log_a x,\ x\in(0,+\infty)$.

② $y=\sin x,\ x\in\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$ 的反函数为 $y=\arcsin x,\ x\in[-1,1]$.

③ $y=\cos x,\ x\in[0,\pi]$ 的反函数为 $y=\arccos x,\ x\in[-1,1]$.

④ $y=\tan x,\ x\in\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$ 的反函数为 $y=\arctan x,\ x\in(-\infty,+\infty)$.

⑤ $y=\cot x,\ x\in(0,\pi)$ 的反函数为 $y=\operatorname{arccot} x,\ x\in(-\infty,+\infty)$.

【例 4】求函数 $y=\sin x,\ x\in\left[\dfrac{\pi}{2},\pi\right]$ 的反函数.

2．复合函数

设函数 $y=f(u)$ 的定义域为 D_f，函数 $u=g(x)$ 的定义域为 D_g，且其值域为 R_g，若 $R_g\cap D_f\neq\varnothing$，则函数 $y=f[g(x)]$ 称为由函数 $u=g(x)$ 与函数 $y=f(u)$ 构成的复合函数，变量 u 称为中间变量.

【例 5】设 $f(x)=\begin{cases}e^x, & x<1,\\ x, & x\geq 1,\end{cases}$ $g(x)=\begin{cases}x+2, & x<0,\\ x^2-1, & x\geq 0,\end{cases}$ 求 $f[g(x)]$.

【例 6】已知 $f\left(e^x\right)=e^{2x}+e^x+x$，求 $f(x)$.

四、初等函数

1．基本初等函数

（1）幂函数

$y = x^{\mu}$（μ是常数，$\mu \in \mathbf{R}$）．其定义域随μ不同而不同：

μ值	函数	定义域	值域
1	$y = x$	$(-\infty, +\infty)$	$(-\infty, +\infty)$
2	$y = x^2$	$(-\infty, +\infty)$	$[0, +\infty)$
3	$y = x^3$	$(-\infty, +\infty)$	$(-\infty, +\infty)$
$\frac{1}{2}$	$y = \sqrt{x}$	$[0, +\infty)$	$[0, +\infty)$
-1	$y = \frac{1}{x}$	$(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$	$(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$

（2）指数函数

$y = a^x$,（$a > 0, a \neq 1$），定义域$D = (-\infty, +\infty)$．因$\forall x \in \mathbf{R}$, 总有$a^x > 0$, 因此值域$R_f = (0, +\infty)$. 又$a^0 = 1$, 故指数函数的图形总在x轴的上方，且过$(0,1)$点. 当$a > 1$时，$y = a^x$单调增加，当$0 < a < 1$时，$y = a^x$单调减少．$y = \mathrm{e}^x$是常用的指数函数，其中$\mathrm{e} = 2.718281828\cdots$

（3）对数函数

$y = \log_a x$,（$a > 0, a \neq 1$），定义域$D = (0, +\infty)$, 值域$R_f = (-\infty, +\infty)$．它和指数函数$y = a^x$互为反函数．$y = \log_a x$的图形总是在y轴的右方，且通过点$(1,0)$．当$a > 1$时，函数单调增加，当$0 < a < 1$时，函数单调减少．以e为底数的对数函数记作$y = \ln x$．

（4）三角函数

名称	表示	定义域	值域	奇偶性
正弦函数	$y=\sin x$	$(-\infty,+\infty)$	$[-1,1]$	奇
余弦函数	$y=\cos x$	$(-\infty,+\infty)$	$[-1,1]$	偶
正切函数	$y=\tan x$	$\left\{x \mid x\neq k\pi+\dfrac{\pi}{2}\right\}$	$(-\infty,+\infty)$	奇
余切函数	$y=\cot x$	$\{x \mid x\neq k\pi\}$	$(-\infty,+\infty)$	奇
正割函数	$y=\sec x=\dfrac{1}{\cos x}$	$\left\{x \mid x\neq k\pi+\dfrac{\pi}{2}\right\}$	$(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)$	偶
余割函数	$y=\csc x=\dfrac{1}{\sin x}$	$\{x \mid x\neq k\pi\}$	$(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)$	奇

（5）反三角函数

名称	表示	定义域	值域	单调性	奇偶性
反正弦函数	$y=\arcsin x$	$[-1,1]$	$\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$	增	奇
反余弦函数	$y=\arccos x$	$[-1,1]$	$[0,\pi]$	减	非奇非偶
反正切函数	$y=\arctan x$	$(-\infty,+\infty)$	$\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$	增	奇
反余切函数	$y=\operatorname{arccot} x$	$(-\infty,+\infty)$	$(0,\pi)$	减	非奇非偶

2．初等函数

由常数和基本初等函数经过有限次的四则运算和有限次的函数复合步骤所构成并可用一个式子表示的函数，称为初等函数．例如 $y=\sqrt{1+x^2}$，$y=\mathrm{e}^{\sin x}$ 都是初等函数．

五、分段函数和隐函数

1．常见的分段函数

在自变量的不同范围中，对应法则用不同式子表示的函数称为分段函数．

例如：函数 $f(x)=\begin{cases} x^2+1, & x<1, \\ 7x-5, & x\geq 1 \end{cases}$ 就是分段函数．

【注】分段函数有可能是初等函数．

（1）绝对值函数

$$f(x)=|x|=\begin{cases} x, & x\geq 0, \\ -x, & x<0. \end{cases}$$

（2）符号函数

$$f(x)=\operatorname{sgn} x=\begin{cases} 1, & x>0, \\ 0, & x=0, \\ -1, & x<0. \end{cases}$$

（3）取整函数

$f(x)=[x]$ 表示不大于 x 的最大整数，对于取整函数，有 $x-1<[x]\leq x<[x]+1$ 成立．

（4）最大（小）值函数

$$y=\max\{f(x),g(x)\},\ y=\min\{f(x),g(x)\}$$

$$\max\{f(x),g(x)\}=\frac{f(x)+g(x)+|f(x)-g(x)|}{2}$$

$$\min\{f(x),g(x)\}=\frac{f(x)+g(x)-|f(x)-g(x)|}{2}$$

2．隐函数

设有关系式$F(x,y)=0,$若对$\forall x\in D,$存在唯一确定的y满足$F(x,y)=0$与x相对应，由此确定的y与x的函数关系$y=y(x)$称为由方程$F(x,y)=0$确定的隐函数. 相对于隐函数而言，$y=f(x)$称为显函数，把一个隐函数化成显函数的过程，叫做隐函数的显化.